

Die Bewegung geladener Teilchen im Magnetfeld eines geraden stromdurchflossenen Drahtes

Von F. HERTWECK

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München
(Z. Naturforsch. 14 a, 47—54 [1959] ; eingegangen am 30. August 1958)

The motion of a charged particle in the magnetic field of a straight electric line current of infinite length is investigated. Using the numerical solutions of the equations of motion the drift velocity of the particle along the wire is calculated. For small particle energies it turns out to be in agreement with ALFVÉN's approximation. Also the limits of the region to which the particle is confined are calculated for different values of the particle energy and its angular momentum.

In der vorliegenden Arbeit wird die Bewegung geladener Teilchen im Magnetfeld eines geraden, unendlich langen, stromdurchflossenen Drahtes untersucht. Die Teilchenbahnen sind immer beschränkt auf das Gebiet zwischen zwei Zylindern um den Draht, deren Durchmesser von der Teilchenenergie und dem Drehimpuls um die Drahtachse abhängen. Der Mittelwert der Geschwindigkeit längs der Drahtachse verschwindet bei dieser Bewegung nicht. Diese „Driftgeschwindigkeit“ wird mit Hilfe der numerischen Integration der Bewegungsgleichungen berechnet und mit der ALFVÉNSchen Näherung verglichen. Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung: Der relative Fehler ist von der Ordnung h^4 , wenn $h = |a \text{ grad } H/H|$, $a = \text{Krümmungsradius der Bahn.}$

1. Die Bewegungsgleichung

Die (nicht-relativistische) Bewegungsgleichung eines geladenen Teilchens mit der Ladung e und der Masse m in einem Magnetfeld bei Abwesenheit anderer Kräfte lautet

$$\ddot{\mathbf{r}} = [\dot{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\omega}]$$

mit $\boldsymbol{\omega} = e \mathfrak{H}/mc$, $|\boldsymbol{\omega}| = \omega$.

\mathfrak{H} ist das Magnetfeld. Bei konstantem Magnetfeld wäre ω die Gyrofrequenz des Teilchens. Die zugehörige LAGRANGE-Funktion ist

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + (\dot{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\alpha})$$

$\boldsymbol{\alpha}$ ist das Vektorpotential des Feldes $\boldsymbol{\omega}$:

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \boldsymbol{\alpha} \quad (1)$$

Mit dem Vektorpotential \mathfrak{A} des Magnetfeldes \mathfrak{H} ist $\boldsymbol{\alpha}$ [cm sec⁻¹] durch die Beziehung $\boldsymbol{\alpha} = e \mathfrak{A}/mc$ verknüpft.

Wir führen Zylinderkoordinaten s, φ, z ein und betrachten den Fall, daß $\boldsymbol{\alpha}$ überall nur eine z -Kom-

ponente hat, die überdies nur von s abhängen möge:

$$\boldsymbol{\alpha} = e_z \alpha(s);$$

e_z ist der Einheitsvektor in z -Richtung. In Zylinderkoordinaten hat die LAGRANGE-Funktion dann die Form

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{s}^2 + s^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \dot{z} \alpha(s);$$

φ und z sind „zyklische“ Variable, so daß man außer der Energiekonstanz noch Erhaltungssätze für die zu φ und z konjugierten Impulse erhält. Die drei Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\ddot{s} - s \dot{\varphi}^2 - \dot{z} \frac{d\alpha(s)}{ds} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} (s^2 \dot{\varphi}) = 0, \quad (2 \text{ a, b, c})$$

$$\frac{d}{dt} [\dot{z} + \alpha(s)] = 0.$$

In der Vektorgleichung (1) bleibt wegen der obigen Annahmen über $\boldsymbol{\alpha}$ nur die φ -Komponente stehen,

$$\omega_\varphi = - \frac{\partial \alpha_z}{\partial s},$$

alle anderen verschwinden.

Das Magnetfeld in der Umgebung eines unendlich langen geraden Drahtes läßt sich durch ein Potential α mit diesen Eigenschaften beschreiben; die einzige Feldkomponente ist

$$H = H_\varphi = \frac{2I}{c} \cdot \frac{1}{s},$$

also

$$\omega = \omega_\varphi = \frac{2eI}{mc^2} \cdot \frac{1}{s}.$$

I ist der durch den Draht fließende Strom (el.-stat. Einheiten). Dann ist das Vektorpotential

$$\alpha(s) = \alpha_z(s) = \text{const} - (s \omega) \ln s \quad (3)$$



(das Produkt $s\omega$ hängt nur von I , nicht aber von s ab). Aus den Gln. (2 b, c) und (3) folgen sofort die Erhaltungssätze

$$s^2 \dot{\varphi} = \frac{L}{m},$$

$$\dot{z} - (s\omega) \ln s = - (s\omega) \ln s_0. \quad (4a, b)$$

Die Konstanten L und s_0 ergeben sich aus den Anfangsbedingungen. L ist der Drehimpuls des Teilchens bezüglich der z -Achse, s_0 derjenige Abstand von der z -Achse, bei dem $\dot{z}=0$ (was aber nicht bei allen Bahnen der Fall zu sein braucht). Außerdem ist die Gesamtenergie E konstant:

$$s^2 + s^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 = \frac{2E}{m}. \quad (4c)$$

Wegen der Erhaltungssätze (4 a, b, c) läßt sich die Lösung des Differentialgleichungssystems (2) auf drei einfache Quadraturen zurückführen.

Wir führen nun folgende dimensionslosen Variablen ein:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= (s\omega)/s_0, & \tau &= \omega_0 t, \\ \sigma &= s/s_0, & \zeta &= z/s_0. \end{aligned} \quad (5)$$

Aus den Gln. (2), (4) und (5) folgt dann das Dgl.-System

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\tau} &= \pm \sqrt{2\varepsilon - \lambda^2/\sigma^2 - \ln^2 \sigma}, \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{\lambda}{\sigma^2}, & \frac{d\zeta}{d\tau} &= \ln \sigma \end{aligned} \quad (6a, b, c)$$

mit den dimensionslosen Parametern

$$\varepsilon = \frac{E}{m\omega_0^2 s_0^2} = \frac{1}{2} \frac{v^2}{s_0^2 \omega_0^2} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{L}{m s_0^2 \omega_0}. \quad (7)$$

ε nennen wir die reduzierte Energie und λ den reduzierten Drehimpuls des Teilchens. Bemerkenswert ist, daß das Dgl.-System (6) keinerlei physikalische Konstanten mehr enthält, auch die Größe s_0 tritt explizit nicht mehr auf. Da die rechten Seiten unabhängig von τ sind, hängt die Gesamtheit der Lösungskurven nur von den beiden Parametern ε und λ ab. Die Variablen φ und z treten wegen der Symmetrie des Magnetfeldes explizit gar nicht auf, sie enthalten also beliebige additive Konstanten, die jedoch die Form der Bahnkurve nicht beeinflussen. Die Lösungen für beliebige Anfangswerte von s , \dot{s} , φ , $\dot{\varphi}$ und beliebige physikalische Parameter e , m und I lassen sich aus dieser zweiparametrischen Lösungsschar durch bloße Maßstabs-Transformationen herstellen.

2. Typen der Bahnkurven

Aus Gl. (6 a) folgt

$$\left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2 = 2\varepsilon - \lambda^2/\sigma^2 - \ln^2 \sigma; \quad (8)$$

für hinreichend große und hinreichend kleine σ wird $(d\sigma/d\tau)^2 < 0$. In diese „verbotenen Gebiete“ kann das Teilchen nicht gelangen. Die Grenzen zwischen dem erlaubten und den beiden verbotenen Gebieten werden durch die Bedingung $d\sigma/d\tau = 0$ gegeben. Die Kurven $(d\sigma/d\tau)^2 = f(\sigma; \varepsilon, \lambda)$ haben den in Abb. 1 gezeigten Typ. In Abb. 2 sind die Grenzen der verbotenen Gebiete angegeben. Die Werte wurden numerisch berechnet.

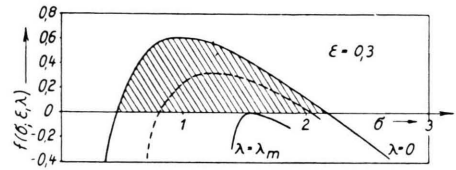


Abb. 1. Der Typ der Funktion $(d\sigma/d\tau)^2 = f(\sigma; \varepsilon, \lambda)$ für verschiedene reduzierte Drehimpulse λ bei vorgegebener reduzierter Energie ε . (Das schraffierte Gebiet, dessen Grenzkurve ($\lambda=0$) nur von ε abhängt, ist mit der Kurvenschar mit dem Scharparameter λ dicht ausgefüllt.)

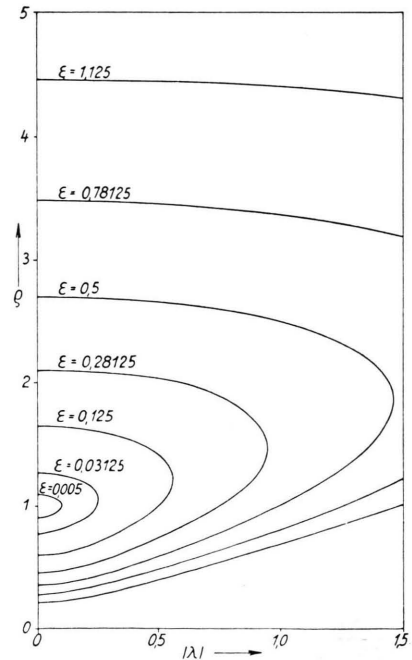


Abb. 2. Verbotene Gebiete. Die Radien $\varrho_i = s_i/s_0$ und $\varrho_a = s_a/s_0$ als Funktion des reduzierten Drehimpulses λ für einige Werte der reduzierten Energie ε . Verboten sind die Gebiete außerhalb der Kurven. (Scharparameter ist ε .)

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $|\lambda| = \lambda_{\max}$, für das die beiden Nullstellen von Gl. (8) zusammenfallen ($\sigma_i = \sigma_a$). Eine elementare Rechnung ergibt

$$\lambda_m^2 = \frac{4\varepsilon}{1 + \sqrt{1+8\varepsilon}} e^{-1 + \sqrt{1+8\varepsilon}}. \quad (9a)$$

Es ist dann $\sigma = \text{const}$ und das Teilchen windet sich auf einer Schraubenlinie mit konstanter Steigung um den Draht herum.

Je nachdem wie groß bei gegebener reduzierter Energie ε der reduzierte Drehimpuls λ ist, gibt es verschiedene Typen von Bahnkurven.

$\lambda = 0$. Dann ist $d\varphi/d\tau = 0$ und das Teilchen bewegt sich in einer festen Meridianebene. Die beiden Nullstellen sind

$$\sigma_i = e^{-\sqrt{2\varepsilon}} \quad \text{und} \quad \sigma_a = e^{+\sqrt{2\varepsilon}},$$

also $\sigma_i < 1$ und $\sigma_a > 1$ (s. Abb. 3 a).

$0 < \lambda^2 < 2\varepsilon$. Hier ist $d\varphi/d\tau \neq 0$. In der mit dem Teilchen mitgedrehten Meridianebene wird das Verhalten qualitativ wie im Falle $\lambda = 0$. Auch hier ist $\sigma_i < 1$ und $\sigma_a > 1$ (s. Abb. 3 b).

$\lambda^2 = 2\varepsilon$. Dann ist $\sigma_i = 1$ und $\sigma_a > 1$. Wegen $(d\zeta/d\tau)_i = 0$ erhält man die in Abb. 3 b dargestellte Kurvenform ($d\varphi/d\tau \neq 0$).

$2\varepsilon < \lambda^2 \leq \lambda_m^2$. Für beide Nullstellen gilt $\sigma_i, \sigma_a > 1$ (Abb. 3 c). Mit wachsendem λ nähern sie sich einander immer mehr und fallen schließlich für $\lambda^2 = \lambda_m^2$ zusammen, s. Gl. (9 a) (Abb. 3 d). Der Abstand vom Draht ist dann

$$\sigma_m = \exp \frac{\sqrt{1+8\varepsilon}-1}{2}. \quad (9b)$$

3. Die Driftgeschwindigkeit $(d\zeta/d\tau)$ in ζ -Richtung

Die Umlaufszeit $\Delta\tau$ des Teilchens und seine Drift $\Delta\zeta$ in ζ -Richtung während eines Umlaufes sind definiert durch die Integrale

$$\Delta\tau = 2 \int_{\tau_i}^{\tau_a} d\tau = 2 \int_{\sigma_i}^{\sigma_a} \frac{d\sigma}{(d\sigma/d\tau)}, \quad (10)$$

$$\Delta\zeta = 2 \int_{\tau_i}^{\tau_a} \left(\frac{d\zeta}{d\tau} \right) d\tau = 2 \int_{\sigma_i}^{\sigma_a} \frac{\ln \sigma d\sigma}{(d\sigma/d\tau)}.$$

Die Driftgeschwindigkeit längs des Drahtes, d. h. die mittlere Geschwindigkeit längs des Drahtes, ist definiert durch die Gleichung

$$(d\zeta/d\tau) = \Delta\zeta/\Delta\tau.$$

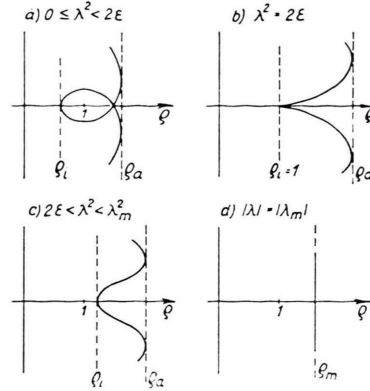


Abb. 3. Die verschiedenen Typen der Bahnkurven, auf die mitbewegte Meridianebene projiziert.

Für den Fall $\lambda = 0$ (d. h. der Drehimpuls $L = 0$) können wir diese Integrale explizit ausrechnen. Es wird

$$(\Delta\tau)_{\lambda=0} = 2 \int_{\sigma_i}^{\sigma_a} \frac{d\sigma}{\sqrt{2\varepsilon - \ln^2 \sigma}}$$

$$\text{und } (\Delta\zeta)_{\lambda=0} = 2 \int_{\sigma_i}^{\sigma_a} \frac{\ln \sigma d\sigma}{\sqrt{2\varepsilon - \ln^2 \sigma}}$$

Mit der Transformation $\ln \sigma = \sqrt{2\varepsilon} x$, $d\sigma = \sqrt{2\varepsilon} e^{\sqrt{2\varepsilon} x} dx$ folgt für die beiden Integrale

$$(\Delta\tau)_{\lambda=0} = 2 \int_{-1}^{+1} \frac{e^{\sqrt{2\varepsilon} x} dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{und } (\Delta\zeta)_{\lambda=0} = 2\sqrt{2\varepsilon} \int_{-1}^{+1} \frac{e^{\sqrt{2\varepsilon} x} x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Wegen der Beziehung $(\Delta\zeta)_{\lambda=0} = 2\varepsilon \frac{\partial (\Delta\tau)_{\lambda=0}}{\partial \varepsilon}$,

die nur für $\lambda = 0$ gilt, brauchen wir lediglich die Integration von $(\Delta\tau)_{\lambda=0}$ explizit durchzuführen und erhalten

$$(\Delta\tau)_{\lambda=0} = 2\pi J_0(i\sqrt{2\varepsilon}) = 2\pi \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{16} + \dots \right),$$

$$(\Delta\zeta)_{\lambda=0} = 2\pi i \sqrt{2\varepsilon} J_1(i\sqrt{2\varepsilon}) = 2\pi \varepsilon \left(1 + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon^2}{48} + \dots \right).$$

Für die Driftgeschwindigkeit $(d\zeta/d\tau)_{\lambda=0}$ folgt dann

$$\left(\frac{d\zeta}{d\tau} \right)_{\lambda=0} = \frac{i\sqrt{2\varepsilon} J_1(i\sqrt{2\varepsilon})}{J_0(i\sqrt{2\varepsilon})} = \varepsilon \frac{1 + \frac{\varepsilon}{4} + \dots}{1 + \frac{\varepsilon}{2} + \dots}. \quad (11)$$

Wenn die reduzierte Energie $\varepsilon \ll 1$, so gilt näherungsweise

$$\left(\frac{d\zeta}{d\tau} \right)_{\lambda=0} \approx \varepsilon$$

oder in den Variablen $s, \varphi, z; t$ (s. Anm. ¹):

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_{L=0} = s_0 \omega_0 \left(\frac{d\tilde{z}}{d\tau}\right) \approx \frac{1}{2} \frac{c^2 E}{e I} \approx \frac{1}{2} \frac{a}{s} |\dot{\tau}|;$$

$$\left(L=0, E \ll \frac{2 e^2 I^2}{m c^4}\right).$$

Auch für den Fall $|\lambda| = \lambda_m$ (d. h. maximal möglicher Drehimpuls) können wir die Driftgeschwindigkeit leicht angeben. Sie ist in diesem Falle $\ln \sigma_m$, wegen $\sigma = \sigma_m = \text{const.}$ Aus Gl. (9) folgt

$$\left(\frac{d\tilde{z}}{d\tau}\right)_{\lambda=\lambda_m} = \frac{\sqrt{1+8\varepsilon}-1}{2}$$

Für kleine ε gilt näherungsweise

$$\left(\frac{d\tilde{z}}{d\tau}\right)_{\lambda=\lambda_m} \approx 2\varepsilon \quad \text{und} \quad \left(\frac{dz}{dt}\right) \approx \frac{c^2 E}{e I}.$$

Wie die numerischen Rechnungen zeigen, hängt die Driftgeschwindigkeit $(d\tilde{z}/d\tau)$ monoton von $|\lambda|$

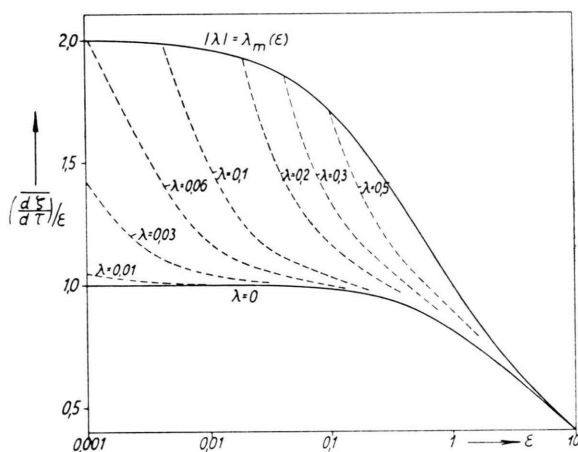


Abb. 4. Die Driftgeschwindigkeit $(d\tilde{z}/d\tau)$. In Abhängigkeit von der reduzierten Energie ε ist die Größe $(d\tilde{z}/d\tau)/\varepsilon$ aufgetragen. Die Kurven konstanten reduzierten Drehimpulses um die Drahtachse, $\lambda = \text{const.}$, sind gestrichelt eingezeichnet.

ab; sie liegt dann in dem Intervall

$$\frac{i\sqrt{2\varepsilon} J_1(i\sqrt{2\varepsilon})}{J_0(i\sqrt{2\varepsilon})} \leq \left(\frac{d\tilde{z}}{d\tau}\right) \leq \frac{\sqrt{1+8\varepsilon}-1}{2}.$$

Für $\varepsilon \ll 1$ ist das näherungsweise (s. o.)

$$\varepsilon \approx \left(\frac{d\tilde{z}}{d\tau}\right) \lesssim 2\varepsilon.$$

In Abb. 4 ist die numerisch ermittelte Driftgeschwindigkeit dargestellt. Abszisse ist ε , Ordinate $(d\tilde{z}/d\tau)/\varepsilon$.

(Dieses Verhältnis ist für alle ε von der Größenordnung 1.)

4. Die Alfvénsche Näherung

Nach ALFVÉN² läßt sich die Bewegung eines geladenen Teilchens in hinreichend schwach inhomogenen Magnetfeldern näherungsweise zusammensetzen aus einer spiralen Bewegung um die Feldlinien und einer Bewegung des Gyromittelpunktes \mathfrak{R} , die durch die Gleichung

$$m \ddot{\mathfrak{R}} = \frac{e}{c} [\dot{\mathfrak{R}}, \zeta(\mathfrak{R})] - M \text{grad } H(\mathfrak{R}) \quad (12)$$

beschrieben wird. (Bewegungsgleichung des „Ersatzteilchens.“) $M = m[\tilde{v}_\perp^2/2H(r)]$ ist das magnetische Bahnmoment der Bewegung um die Feldlinien. (\tilde{v}_\perp ist die Geschwindigkeitskomponente des Teilchens senkrecht zum Magnetfeld und relativ zum Gyromittelpunkt, d. h. nach Abzug der Driftgeschwindigkeit; die Mittelung ist über einen Umlauf erstreckt.) ALFVÉN² hat gezeigt, daß in hinreichend schwach veränderlichen Feldern (d. h. $|a \text{grad } H| \ll H$, $a = \text{Krümmungsradius der Bahn}$) das magnetische Bahnmoment M in erster Näherung konstant ist (vgl. auch Anm. ^{3,4}). Die Geschwindigkeit $\dot{\mathfrak{R}}$ des Gyrozentrums soll die Driftgeschwindigkeit des wirklichen Teilchens, also dessen „mittlere Bahn“, beschreiben.

Man hat also die nicht um die Feldlinien spiralen den Lösungen der Gl. (12) zu suchen. Strenge Lösungen mit dieser Eigenschaft gibt es im allgemeinen nicht, d. h. nach mehr oder wenig langer Zeit wird die Bahn des Gyromittelpunktes anfangen, um die Feldlinien zu spiralen. Es sind also im allgemeinen nur die Näherungslösungen der Gl. (12) sinnvoll, die überall nichtspiralende Bahnen beschreiben. Das übliche Verfahren für die Auffindung dieser Näherungslösungen ist ^{2,3}, daß man die Trägheit der Bewegung quer zum Magnetfeld gegen die anderen Kräfte vernachlässigt. Der Trägheitsterm berechnet sich dann allein aus der zum Magnetfeld parallelen Komponente der Geschwindigkeit. (Dabei tritt auch eine Komponente senkrecht zum Feld auf, welche von der Feldlinienkrümmung herrührt.)

¹ $a = m|\dot{\tau}|c/eH$ ist der Gyrationradius, s ist der Abstand vom Draht (vgl. L. SPITZER, Physics of Fully Ionized Gases, Interscience, New York 1956, S. 7).

² H. ALFVÉN, Cosmical Electrodynamics, Clarendon Press, Oxford 1950.

³ G. HELLWIG, Z. Naturforsch. **10 a**, 508 [1955].

⁴ M. KRUSKAL, Proc. III. Int. Conf. on Ioniz. Phenomena in Gases, Venice 1957, S. 562. — F. HERTWECK u. A. SCHLÜTER, Z. Naturforsch. **12 a**, 844 [1957].

Wir haben hier ein Magnetfeld von hoher Symmetrie untersucht, in dem die Teilchenbahnen streng periodisch verlaufen. Das hat zur Folge, daß das magnetische Bahnmoment M zeitlich streng konstant bleibt. Außerdem sind in diesem Fall „nicht-spiralende“ Lösungen der Dgl. (12) vorhanden. Im folgenden werden wir den Unterschied dieser Lösungen zu den Lösungen der Bewegungsgleichung (2) betrachten.

Zunächst bringen wir Gl. (12) in die gleiche Form wie die Bewegungsgleichung in Abschnitt 1:

$$\ddot{\mathbf{R}} = \omega [\dot{\mathbf{R}}, \mathbf{e}_H] - M^* \text{grad } \omega(\mathbf{R}), \quad (12')$$

$$M^* = \frac{c}{e} M, \quad \omega = \frac{e H(\mathbf{R})}{m c}.$$

Der Vektor \mathbf{e}_H ist der Einheitsvektor in Richtung des Magnetfeldes $\mathbf{H}(\mathbf{R})$. Wir zerlegen nun $\dot{\mathbf{R}}$ in die Anteile $\dot{\mathbf{R}}_{||} = V \mathbf{e}_H$ und $\dot{\mathbf{R}}_{\perp}$. Da $(d/dt) \dot{\mathbf{R}}_{\perp}$ vernachlässigt werden soll, folgt

$$\ddot{\mathbf{R}} = \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{R}}_{||} = \dot{V} \mathbf{e}_H + V \dot{\mathbf{e}}_H.$$

Wir setzen dies in Gl. (12') ein. Die Zerlegung in Parallel- und Querkomponenten durch skalare und vektorielle Multiplikation mit \mathbf{e}_H ergibt

$$\dot{V} = -M^* (\mathbf{e}_H \text{grad } \omega), \quad (13 \text{ a, b})$$

$$\dot{\mathbf{R}}_{\perp} = \frac{1}{\omega} [\mathbf{e}_H, \{M^* \text{grad } \omega + V \dot{\mathbf{e}}_H\}].$$

Im Spezialfall des geraden Drahtes ist (Zylinderkoordinaten S, Φ, Z)

$$\dot{\mathbf{e}}_H = -\dot{\Phi} \mathbf{e}_s \quad \text{und} \quad \text{grad } \omega = -\frac{\omega}{S} \mathbf{e}_s.$$

\mathbf{e}_s ist der Einheitsvektor in Radialrichtung, $\dot{\Phi}$ die Winkelgeschwindigkeit des Gyrozentrums bezüglich der Z -Achse. Wir erhalten damit für die Querkomponente der Geschwindigkeit des Ersatzteilchens in ALFVÉNScher Näherung

$$\dot{\mathbf{R}}_{\perp} = \left(\frac{V}{\omega} \dot{\Phi} + \frac{M^*}{S} \right) \mathbf{e}_z. \quad (14)$$

$\dot{\mathbf{R}}_{\perp}$ hat nur eine Komponente in Z -Richtung, folglich ist $S = \text{const}$.

Wir wollen nun Gl. (12') auch direkt lösen. Die Bedingung des Nicht-Spiralens um die Feldlinien, die wir den Lösungen auferlegen wollen, ist gleichbedeutend mit der Forderung, daß in der Ebene senkrecht zum Magnetfeld die Geschwindigkeit höchstens den Betrag ändern soll, d. h. die Beschleunigung $\ddot{\mathbf{R}}$ soll keine Komponente senkrecht zur Ge-

schwindigkeit $\dot{\mathbf{R}}$ haben. Gl. (12') folgt aus der LAGRANGE-Funktion

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 - M^* \omega + (\dot{\mathbf{R}}, \boldsymbol{\alpha}).$$

Über ω (bzw. $\boldsymbol{\alpha}$) machen wir die gleichen Voraussetzungen, wie in Abschnitt 1. In Zylinderkoordinaten erhält man dann das Gleichungssystem

$$\ddot{S} - S \dot{\Phi}^2 - \dot{Z} \frac{\partial \alpha}{\partial S} + M^* \frac{\partial \omega}{\partial S} = 0,$$

$$S^2 \dot{\Phi} = D/m, \quad \dot{Z} + \alpha(S) = \alpha(S_0).$$

D ist der Drehimpuls des Ersatzteilchens bezüglich der Z -Achse, S_0 der „Normalabstand“, für den $\dot{Z} = 0$ gilt. Wir setzen wieder für den Spezialfall des geraden Drahtes

$$-\frac{\partial \alpha}{\partial S} = \omega = \frac{2 e I}{m c^2} \cdot \frac{1}{S}, \quad \partial \omega / \partial S = -\omega / S,$$

$$\alpha = \text{const} - \omega S \ln S,$$

Dann folgt

$$\ddot{S} = \frac{D^2}{m^2 S^3} - \omega \dot{Z} + M^* \frac{\omega}{S}, \quad (15 \text{ a, b, c})$$

$$\dot{\Phi} = \frac{D}{m S^2}, \quad \dot{Z} = \omega S \ln \frac{S}{S_0}.$$

Die Bedingung des Nicht-Spiralens bedeutet hier: In der Meridianebene soll die Beschleunigung keine Komponente senkrecht zur Geschwindigkeit haben,

$$\ddot{S} \dot{Z} - \dot{S} \ddot{Z} = 0. \quad (16)$$

Durch Einsetzen von \dot{Z} und \ddot{Z} in Gl. (15 a) und (16) erhält man zwei Differentialgleichungen für S , die nicht identisch sind. Nur die Lösung $\dot{S} = \text{const}$ erfüllt beide Gleichungen. Dann ist aber $\ddot{S} = 0$ und aus Gl. (15 a, b) folgt

$$\dot{\Phi} = \frac{D}{m S^2}, \quad \dot{Z} = \frac{D^2}{m^2 \omega S^3} + \frac{M^*}{S}. \quad (17 \text{ a, b})$$

Die Bewegung des Ersatzteilchens ist also bestimmt durch seinen Drehimpuls D bezüglich der Z -Achse, sein magnetisches Moment M und den Abstand S von der Z -Achse. (Die Größen I, e und m betrachten wir als vorgegeben.) Die rechten Seiten von Gl. (17 b) und Gl. (14) sind identisch. Wir erhalten hier für die exakte Lösung des Ersatzteilchenproblems das gleiche Ergebnis wie für die ALFVÉNSche Näherungslösung. Das liegt daran, daß bei diesem einfachen Fall, wo die Driftgeschwindigkeit über beliebig lange Zeiten konstant bleibt, das vernachlässigte Glied wirklich Null war.

Durch die Transformationsgleichungen (5) hatten wir die Dgl. (2) in eine dimensionslose Form gebracht und gesehen, daß die verschiedenen möglichen Bahnkurven nur von den beiden Parametern ε und λ , der reduzierten Energie und dem reduzierten Drehimpuls um die z -Achse, abhängen. Wir werden nun Gl. (16) ebenfalls dimensionslos machen, um zu sehen, von welchen Parametern die Lösungen des Ersatzteilchenproblems abhängen. Wir führen folgende Variablen ein:

$$\begin{aligned} dT &= \omega(S) dt, & \frac{d\Xi}{dT} &= \frac{\dot{Z}}{S\omega}, \\ \delta &= \frac{D}{m S^2 \omega}, & \mu &= \frac{M^*}{S^2 \omega} = \frac{c M}{e S^2 \omega}. \end{aligned} \quad (18)$$

Es folgt dann

$$\frac{d\Phi}{dT} = \delta, \quad \frac{d\Xi}{dT} = \delta^2 + \mu. \quad (19)$$

Die Gesamtheit der Lösungen des Ersatzteilchenproblems hängt also nur von den beiden Parametern μ und δ ab.

Wir wollen nun die Lösungen der exakten Bewegungsgleichung mit den Lösungen des Ersatzteilchenproblems vergleichen. Dazu müssen wir aber wissen, wie wir die Bahnen einander zuordnen sollen. Dafür kann aber keine allgemeine Vorschrift angegeben werden, und die Zuordnung ist nicht ohne Willkür möglich. Betrachten wir zunächst einmal die folgende Gegenüberstellung der Parameter:

wirkliches Teilchen	Ersatzteilchen
Physikalische Größen	
E die Energie	M das magnetische Bahnmoment
L der Drehimpuls bezüglich der z -Achse	D der Drehimpuls bezüglich der Z -Achse
s_0 der „Normalabstand“ (abhängig vom Impuls in z -Richtung)	S der Abstand von der Z -Achse
dimensionslose Größen	
$\varepsilon = \frac{E m c^4}{4 e^2 I^2}$ reduzierte Energie	$\mu = \frac{m c^2 M}{2 e^2 S I}$ reduziertes magn. Bahnmoment
$\lambda = \frac{c^2 L}{2 e I s_0}$ reduzierter Drehimpuls	$\delta = \frac{c^2 D}{2 e I S}$ reduzierter Drehimpuls
hieraus folgt:	
Die Lösung der Bewegungsgleichung und die mittleren Geschwindigkeiten	Die Lösung der Gleichung für das Ersatzteilchen mit den Geschwindigkeiten
$\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right) = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\tau}$	$\frac{d\Phi}{dT} = \delta$
$\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right) = \frac{\Delta\zeta}{\Delta\tau}$	$u \equiv \frac{d\Xi}{dT} = \delta^2 + \mu$

Wir brauchen also drei Beziehungen zwischen den Wertetripeln (E, L, s_0) und (M, D, S) . Zunächst haben wir die (allgemein gültige) Beziehung

$$E = \frac{m}{2} (\dot{\mathfrak{X}}_{\perp}^2 + \dot{\mathfrak{X}}^2) + M H, \quad (19a)$$

d. h. die Energie des wirklichen Teilchens soll sich zusammensetzen aus der Translationsenergie und der „spiralenden Energie“ MH des Ersatzteilchens. Diese Gleichung liegt der Definition des magnetischen Bahnmomentes M zugrunde. Wegen der Symmetrie des Problems ergeben sich zwanglos noch die Gleichungen

$$L = D \quad \text{und} \quad \dot{\varphi} = \dot{\Phi}, \quad (19b, c)$$

d. h. beide Teilchen sollen den gleichen Drehimpuls um die Drahtachse haben und die Winkelgeschwindigkeit des Ersatzteilchens soll gleich der mittleren Winkelgeschwindigkeit des wirklichen Teilchens sein. Das bedeutet, daß $(1/\bar{s}^2) = 1/S^2$ gefordert wird. Dann ist im allgemeinen aber $S \neq s$.

In den dimensionslosen Variablen lauten diese Gleichungen

$$\lambda \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta\tau} \right) = \delta^2, \quad \lambda s_0 = \delta S, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} (u^2 = \delta^2) + \mu.$$

Links stehen jeweils die Größen, die sich auf das wirkliche Teilchen beziehen, rechts die Größen für das Ersatzteilchen. Die beiden letzten Gleichungen enthalten nur die vier Parameter ε , λ , μ und δ , während s_0 und S nur in der ersten Gleichung vorkommen. Man kann also aus den beiden letzten Gleichungen eine Zuordnung $(\varepsilon, \lambda) \longleftrightarrow (\mu, \delta)$ erhalten. $(\Delta\varphi/\Delta\tau)$ ist nur numerisch bekannt. In Abb. 5 sind die Kurvenscharen $\varepsilon = \text{const}$ und $\lambda = \text{const}$ (gestrichelt) in der $\mu - \delta$ -Ebene eingetragen.

Wir wollen nun die Driftgeschwindigkeit der ALFVÉNSchen Näherung, u , mit der Driftgeschwindigkeit des wirklichen Teilchens, $(d\zeta/d\tau)$, vergleichen. Wir bilden den relativen Fehler

$$\Delta = \frac{(d\zeta/d\tau) - u}{u}$$

der ALFVÉNSchen Näherung u zu der (numerisch berechneten) Lösung der Bewegungsgleichung des Einzelteilchens.

Für $\lambda = 0$ (oder $\delta = 0$) kann man $(d\zeta/d\tau)$ und u exakt ausrechnen, die resultierende Kurve ist in Abb. 6a dargestellt. Bei $\varepsilon \approx 2,6$ oder $\mu \approx 1,6$ hat der relative Fehler ein Maximum; d. h. es ist

$$\Delta < 0,13 \quad \text{für alle } \varepsilon, \mu \quad (\text{wenn } \lambda = 0).$$

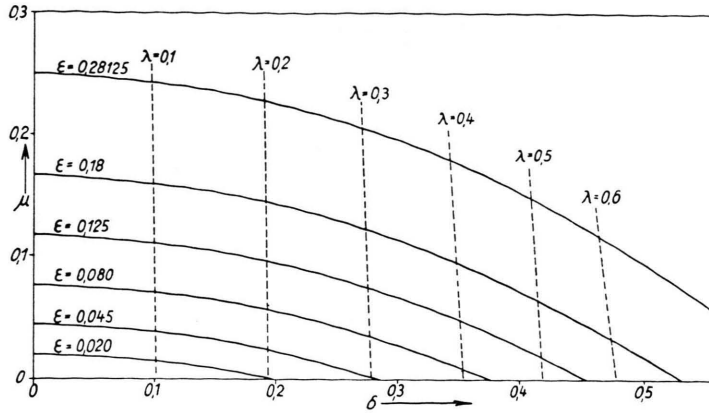


Abb. 5. Die Zuordnung der Parameter ε und λ (reduzierte Energie und reduzierter Drehimpuls um die Drahtachse) des wirklichen Teilchens zu den Parametern μ und δ (reduziertes magnetisches Bahnmoment und reduzierter Drehimpuls um die Drahtachse) des Ersatzteilchens.

Für kleine ε oder μ , d. h. $E \ll 2 e^2 I^2 / m c^4$ (etwa ab $\varepsilon, \mu < 0,1$), gilt

$$\Delta = \frac{\varepsilon}{4} + O(\varepsilon^2) = \frac{\mu}{4} + O(\mu^2),$$

wie man durch Reihenentwicklung zeigen kann.

Die Bedingung für die Gültigkeit der ALFVÉN'schen Näherung ist, daß

$$a | \text{grad } H | \ll H \quad (20)$$

ist, wo a den Krümmungsradius der Bahn bedeutet. Um zu sehen, wie sich diese Bedingung zur Bedingung $\varepsilon \ll 1$ verhält, schreiben wir zuerst ε in einer etwas anderen Form, welche die physikalische Bedeutung der Bedingung $\varepsilon \ll 1$ besser erkennen läßt.

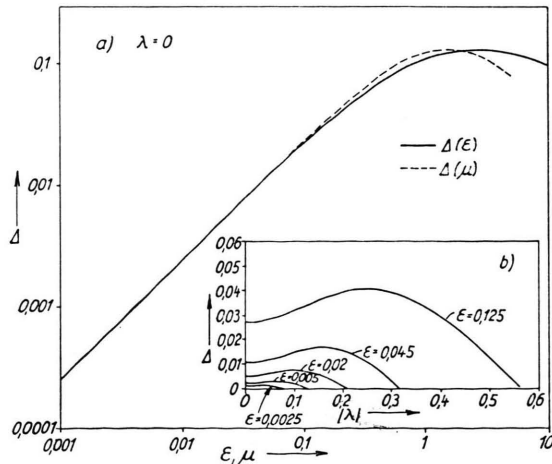


Abb. 6. a) Der relative Fehler Δ der Driftgeschwindigkeit in ALFVÉN'scher Näherung im Vergleich mit den Lösungen der exakten Bewegungsgleichungen in Abhängigkeit von ε für $\lambda=0$. b) Der relative Fehler Δ in Abhängigkeit von λ für einige Werte von ε (Numerische Lösungen).

Wir hatten

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{v^2}{s_0^2 \omega_0^2}$$

eingeführt. $s_0 \omega_0$ hängt aber nur von den physikalischen Parametern ab, so daß wir, wenn wir mit s den mittleren Abstand des Teilchens vom Draht bezeichnen, auch $s_0 \omega_0 = s \omega(s)$ setzen können. $\omega(s)$ ist also die Gyrofrequenz an der Stelle des mittleren Abstandes. $v/\omega(s)$ ist dann (bis auf Glieder höherer Ordnung) der mittlere Gyrationradius \bar{a} und wir erhalten

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{a}}{s} \right)^2.$$

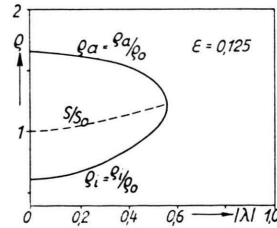


Abb. 7. Die Grenze der verbotenen Gebiete für $\varepsilon=0,125$ in Abhängigkeit von λ und der Abstand S des zugeordneten Ersatzteilchens (gestrichelt).

Die Bedingung (20) beziehen wir ebenfalls auf den mittleren Abstand. Sie lautet dann

$$\bar{a}/s \ll 1.$$

Der relative Fehler Δ ist (für $\lambda=0$) also von der Ordnung (\bar{a}/s) .

Abb. 6 zeigt für einige Werte von ε die Kurve $\Delta = \Delta(\varepsilon, \lambda)$ über λ . Δ hat für $|\lambda| = \lambda_{\max}$ immer den Wert Null; dann sind nämlich die wirkliche Teilchenbahn und die Bahn des Ersatzteilchens identisch

($\mu=0$). Das Maximum ist bei allen fünf Kurven etwa das 1,5-fache des jeweiligen Wertes für $\lambda=0$. Dies gilt vermutlich für alle Werte von ε , doch läßt sich Genaueres nicht sagen, da die Kurven nur numerisch bekannt sind.

Abb. 7 zeigt für $\varepsilon=0,125$ die Grenzzadien

$$Q_i = s_i/s_0 \quad \text{und} \quad Q_a = s_a/s_0$$

und den aus der Näherungslösung folgenden Abstand des Gyrozentrums.

Herrn Dr. A. SCHLÜTER danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und Diskussionen. Frau G. HAIN danke ich für die Mitwirkung bei den numerischen Rechnungen auf der Göttinger Elektronischen Rechenmaschine G 2.

Berechnung des Einflusses der Anisotropie und eines zusätzlichen Magnetfeldes auf den elektrischen Durchschlag mit Anwendung auf Germanium*

Von WOLFGANG FRIE*

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität Münster i. W.
(Z. Naturforschg. **14 a**, 54—62 [1959]; eingegangen am 20. August 1958)

Es werden die von FRANZ¹ angegebenen Formeln auf den elektromagnetischen Fall erweitert und für Germanium ausgewertet. Die Formeln für die Erhöhung der Durchschlagsfeldstärke durch das Magnetfeld lassen sich mit den von FINKE² gemessenen Kurven vergleichen. Sie liefern Aussagen über die Richtungsabhängigkeit des Effektes. Die Formeln lassen sich durch einen verhältnismäßig einfachen Formalismus gewinnen.

1. Allgemeine Formeln zur Berechnung der Verteilungsfunktion Die „effektive Feldstärke“

FRANZ hat ein Gleichungssystem angegeben, das die Verteilungsfunktion $f(\mathbf{f})$ der Elektronen im Falle eines rein elektrischen Feldes zu berechnen gestattet (s. Anm. ¹, S. 220 ff.). Dazu macht man den folgenden Ansatz:

Die Verteilungsfunktion $f_0(E)$ wird durch das Feld \mathcal{F} ein Stück in Richtung $-\mathcal{F}$ mitgenommen. Es ist also

$$f(\mathbf{f}) = f_0(\mathbf{f} - \Delta \mathbf{f}) = f_0(E) + \frac{e}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{f}} \cdot \mathcal{F} \tau \frac{df_0(E)}{dE}. \quad (1.1)$$

Schreibt man $\tau(\mathbf{f})$ für τ , so ist dies eine Aufspaltung von $f(\mathbf{f})$ in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil, wenn man $\tau(\mathbf{f})$ als symmetrisch in \mathbf{f} voraussetzt.

Angeregt durch Messungen von LAUTZ³ und FINKE² soll ein zusätzliches Magnetfeld mit berücksichtigt werden. Um möglichst weitgehende Allge-

meinheit zu bewahren, sei an Stelle von $\tau(\mathbf{f})$ die in \mathbf{f} antisymmetrische Hilfsgröße $\lambda(\mathbf{f})$ eingeführt durch die Definition:

$$\lambda(\mathbf{f}) \equiv \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{f}} \cdot n \tau(\mathbf{f}); \quad n \equiv \frac{\mathcal{F}}{F}. \quad (1.2)$$

Die Verbindung mit der Relaxationszeit τ soll später wieder hergestellt werden. Der Ansatz für die Verteilungsfunktion ist also

$$f(\mathbf{f}) = f_0(E) + e F \lambda(\mathbf{f}) \frac{df_0(E)}{dE}. \quad (1.3)$$

Für die Veränderung der Verteilungsfunktion gilt die BOLTZMANNsche Gleichung:

$$\frac{\partial f(\mathbf{f})}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{f}} \cdot \left[f(\mathbf{f}) \frac{d\mathbf{f}}{dt} \right] + \int d^3\mathbf{f}' [c(\mathbf{f}'; \mathbf{f}) f(\mathbf{f}') - c(\mathbf{f}; \mathbf{f}') f(\mathbf{f})]. \quad (1.4)$$

$c(\mathbf{f}; \mathbf{f}')$ ist die zeitliche Wahrscheinlichkeit für einen Übergang vom Zustand \mathbf{f} in die Volumeneinheit \mathbf{f}' durch Gitterstöße, $c(\mathbf{f}'; \mathbf{f})$ die für einen Übergang von der Volumeneinheit \mathbf{f}' in den Zustand \mathbf{f} . Stoßionisation und Rekombination sind hierbei vernach-

* Jetzt: Forschungslaboratorium der Siemens-Schuckertwerke AG, Erlangen.

* Auszug aus der Dissertation Münster i. W. 1958.

¹ W. FRANZ, Handbuch der Physik, Band XVII; im folgenden mit A zitiert.

² G. FINKE, Dissertation, Braunschweig 1957. Vgl. auch G. FINKE und G. LAUTZ, Z. Naturforschg. **14 a**, 62 [1959]; nachstehend.

³ G. LAUTZ, Vortrag auf der Tagung der Nordwestdeutschen Physikalischen Gesellschaft, April 1957, in Münster i. W.